GPS/重力边值问题的求解及应用

李 斐[1,2,3] 陈 武[1,2] 岳建利[3]
1 香港理工大学土地测量与地理资讯学系, 香港 九龙 红磡
2 武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室, 武汉 430079
3 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室, 武汉 430079

摘 要 从分析 GPS 技术在确定地球形状中的作用入手, 论述了建立一类新的大地边值问题——GPS/重力边值问题的意义, 给出了 GPS/重力边值问题的定义及数学描述, 推导出 GPS/重力边值问题的逼近解式, 并给出了应用 GPS/重力边值问题确定(似)大地水准面、地面垂线偏差及外部重力场的基本公式. 对 GPS 技术用于物理大地测量的优势及有待解决的问题进行了简要归纳.

关键词 GPS/重力边值问题 积分方程 (似)大地水准面 垂线偏差 外部重力场

文章编号 0001－5733(2003)05－0595－05 中图分类号 P228 收稿日期 2002－11－07, 2003－05－19收修定稿

ON SOLUTION AND APPLICATION OF GPS/GRAVITY BOUNDARY VALUE PROBLEM

LI FEI[1,2,3] CHEN WU[1,2] YUE JIANLI[3]
1 *Dept. of Land Surveying and Geo-informatics, the Hong Kong Polytechnic University, Hung Hom, Kowloon, Hong Kong, China*
2 *National Lab. for Information Engineering in Surveying and Mapping and Remote Sensing, Wuhan University, Wuhan* 430079, *China*
3 *The Key Lab of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan* 430079, *China*

Abstract A new geodetic boundary value problem: GPS/Gravity-BVP is studied in this paper. Firstly, the definition and integral equation of GPS/Gravity-BVP are given, then an approach solution of GPS/Gravity-BVP is obtained. Also, the formulas for determining quasi-geoid, deflections of the vertical and external gravity field are given by use of the solution of GPS/Gravity-BVP. Furthermore, the advantages and problems of GPS/Gravity-BVP in physical geodesy are discussed.

Key words GPS/Gravity-BVP, Integral equation, Quasi-geoid, Deflections of the vertical, External gravity field.

1 引 言

GPS 技术能够快速、准确地给出地面点的大地高, 从理论上解决了物理大地测量研究中最为困难的问题之一——地球自然形状的确定. 但是, 由于在 GPS 出现之前, 关于地球形状的描述, 一直是以大地水准面或似大地水准面来表达的, 全球各高程系统也都是以局部、区域及全球大地水准面或似大地水准面作为基准面. 从实际应用的角度, 作为高程基准的(似)大地水准面的获取仍有必要. 而仅仅依靠 GPS 的纯几何功能, 对于具有一定物理内涵的(似)大地水准面的确定以及外部重力场结构分析, 尚显得无能为力. 另一方面, 以 GPS 大地高取代目前已被广泛应用、自成体系的高程基准以及长期积累的庞大的重力、水准数据也不现实. 因此, 在进一步有效获取和增加 GPS 数据的同时, 如何将 GPS 这一新的技术手段所提供的约束与传统的物理大地测

基金项目 香港 MPF(A. 34. 37. PD51)测绘科技发展基金(20010103)及测绘遥感信息国家重点实验室开放基金(02-0201).
作者简介 李 斐, 男, 1960 年生, 博士, 武汉大学教授、博士生导师, 主要从事物理大地测量与地球物理科研与教学. E-mail: fli@wtusm.edu.cn

量方法以及已有的边界数据(重力、水准等)有机地结合,拓展物理大地测量研究的途径和方法,提高(似)大地水准面确定及外部重力场赋值的精度,成为值得深入研究的问题.

传统物理大地测量获取地面高程,包括两个步骤:重力水准测量及重力水准面的计算.这一过程在数学属性上属于自由边界问题,由于自由边界的限制,使得边界上的正常重力无法直接计算,导致传统物理大地测量不得不构制出重力异常作为边界扰动量.以重力异常作为大地边值问题中的边界条件,实际上是物理大地测量采取线性化方法和扰动技术将自由边界问题转化成为固定边界问题,这其中隐含了归算密度的未知性、重力水准测量的误差积累等固有的误差源,并进一步传播至(似)大地水准面的确定以及对外部重力场的赋值之中.

事实上,GPS 技术被广泛应用之前,已有学者对大地固定边值问题进行过研究,如 Koch 等[1,2] 对斜边界固定边值问题的求解方法进行了讨论,Bjerhammar 等[3] 对斜边界固定边值问题的适定性进行了分析,Graferend 等[4] 从数值分析角度,应用 Hilbert 空间分析技术,针对自由和固定边值问题,推导出广义 Stokes 函数和 Hotine 函数.但当时直接以地球表面作为边界,以其上扰动重力作为边值是不现实的,因此,几乎所有的前期研究最终均通过线性化或物理大地测量基本微分方程的变换,将问题转化成为以重力异常为边值的传统的大地边值问题进行求解.这使得传统大地边值问题求解中所面临的困难,难以从根本上克服.而随着 GPS 技术的广泛应用,大地高的直接获取成为可能,这意味着有望建立起相应的固定边界问题,以一个全新角度来处理物理大地测量所研究的对象——似大地水准面的确定和外部重力场的赋值.因为其提供了如下的有利条件:1.避免了传统物理大地测量在处理自由边界问题过程中的误差积累及传播;2.可以提供一个固定边界;3.由于正常重力的直接可获得性使得扰动重力作为边界条件加以应用成为可行,并且,扰动重力在用以分析外部重力结构和反演地球内部重力异常时,物理意义较之重力异常更为合理[5];4.固定边界问题相对自由边界问题的求解更加容易,而且物理大地测量将自由边界问题转化成为固定边值问题后得到的一系列方法及公式可以被应用.

因此,如何充分发挥 GPS 大地高的优势,建立起相应的大地边值问题,并予以求解和应用,成为问题的关键.为此,Moritz[1,2] 提出了 GPS/重力边值问题的概念,并通过扰动重力与重力异常具有类似的调和属性,从 Molodensky 收缩法的角度,直接给出 GPS 重力边值问题的解.本文将在此基础上,更详尽地对 GPS/重力边值问题的定义及数学表达式进行分析,并从一个更直接的角度对 GPS 重力边值问题进行求解.最后,对 GPS 重力边值问题在高程异常、垂线偏差及外部重力场确定等方面的应用进行了讨论.

2 GPS/重力边值问题的定义及其数学表达

GPS/重力边值问题的定义可以归纳为:以地球自然表面为已知边界,以其上扰动重力为边界条件,确定(似)大地水准面及外部重力场.

按照物理大地测量理论,在确定地球几何量及外部重力场的过程中,扰动位 T 与扰动重力 δg 之间存在如下关系

$$\delta g = -\partial T / \partial h, \tag{1}$$

其中 $\partial T/\partial h$ 为沿垂向高程 h 的变化率.据此,可以建立起扰动位 T 与扰动重力 δg 以及地球几何量之间的函数关系.

应用 Green 第三恒等式[6],并考虑扰动位在地球外部的调和属性,扰动位 T 满足如下关系式

$$-2\pi T + \int_S \left[T \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) - \frac{1}{l}\frac{\partial T}{\partial n}\right] \mathrm{d}S = 0, \tag{2}$$

其中 S 为地球表面,n 为 S 的法向,l 为待求点与积分面元 $\mathrm{d}S$ 之间的距离.

通常情况下,地球表面的法向与垂向并不重合,但扰动位 T 沿法向的导数与垂向导数之间有如下关系成立:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \left[\frac{\partial T}{\partial h} + \gamma(\xi \tan\beta_1 + \eta \tan\beta_2)\right]\cos\beta, \tag{3}$$

其中 γ 为正常重力,ξ 与 η 为垂线偏差分量,β_1 和 β_2 分别为南北向断面与东西向断面相对水平面的夹角,β 为地形面的最大倾角.

将公式(1)代入公式(3)而后再代入公式(2),便得到 GPS/重力边值问题的基本数学表达式

1) Moritz H. Physical Geodesy after GPS. In: International Conference of SIST'98, Wuhan, China, 1998. 11

2) Moritz H. Molodensky's Theory and GPS. In: M S Molodensky In Memoriam, Graze, 2000

$$T-\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right)T\mathrm{d}S=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{1}{l}\left[\delta g-\gamma(\xi\tan\beta_1+\eta\tan\beta_2)\right]\cos\beta\mathrm{d}S. \quad (4)$$

从公式(4), 可以分析出 GPS/重力边值问题具有如下基本特征:

(1) GPS/重力边值问题是一个非线性斜向导数边值问题, 边值由(4)式右端给出.

(2) 公式(4)是一个第二类 Fredholm 积分方程. 尽管含有垂线偏差及地形倾角等较多参量, 但对问题描述更加全面和直接, 反映出以地球表面作为边界面的复杂性.

(3) 公式(4)与 Molodensky 边值问题积分方程[6]类似, 但积分核相对简单, 边值以扰动重力 δg 取代重力异常 Δg. 这意味着求解过程可以借助 Molodensky 理论中的方法及有关公式.

(4) 公式(4)中的边界面 S 是作为已知量考虑, 即 GPS/重力边值问题是固定边界问题. 而 Molodensky 问题所对应的积分方程中的边界面 S 却是未知量, 只是从逼近的观点将其作为已知量考虑, 其实质上仍是自由边界问题. 因此, 两者形式类似, 但数学属性根本不同.

3　GPS/重力边值问题的求解

为了避免方程(4)在求解上的复杂性, 借助物理大地测量关于外部扰动位的单层位密度逼近方式, 将扰动位 T 以简单适用的单层位形式表示, 即

$$T=\int_S\frac{\varphi}{l}\mathrm{d}S, \quad (5)$$

其中 φ 可以看作单层密度乘以引力常数. 实际上, Molodensky 问题的求解, 最终也是遵循这一途径.

应用单层位在地球表面的不连续性, 对公式(5)沿垂线方向求导, 得到

$$\frac{\partial T}{\partial h}=-2\pi\varphi\cos\beta+\int_S\varphi\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{l}\right)\mathrm{d}S. \quad (6)$$

将公式(1)代入公式(6), 如下等式成立

$$\delta g=2\pi\varphi\cos\beta-\int_S\varphi\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{l}\right)\mathrm{d}S. \quad (7)$$

显然, 由于地球表面的不规则性, 方程(7)的求解仍很困难. 在很高精度的要求下, 我们可以借助数字地形模型求出方程(7)的数值解, 也可以借助 Molodensky 收缩法[7] 求出问题的级数解. 本文运用连续趋近法求出问题的逼近表达.

首先将地球表面的影响表示为

$$r_p=R+h_p,\quad r=R+h, \quad (8)$$

r_p 与 r 分别为待求 P 点与积分面元对应的地面向径, h_p 与 h 分别为对应点的大地高, R 为地球平均半径. 这意味着忽略了参考椭球的扁率影响, 量级为 10^{-3}. 在此精度下, 进一步有

$$\frac{\partial}{\partial h_p}\left(\frac{1}{l}\right)=\frac{\partial}{\partial r_p}(r_p^2+r^2-2rr_p\cos\psi)^{-1/2}$$
$$=\frac{r^2-r_p^2}{2r_pl^3}-\frac{1}{2r_pl}, \quad (9)$$

以及

$$\frac{r^2}{r_p}=R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2\Big\backslash R\left(1+\frac{h_p}{R}\right)=R, \quad (10)$$
$$r^2-r_p^2=(h-h_p)(r+r_p)=2R(h-h_p). \quad (11)$$

再根据 β 表达的面元法向与垂向之间的关系, 将积分面元 $\mathrm{d}S$ 以单位球面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的形式表示为

$$\mathrm{d}S=r^2\sec\beta\mathrm{d}\sigma. \quad (12)$$

则积分方程(7)最后可以写为

$$2\pi\varphi\cos\beta-\int_\sigma\left(\frac{R^2(h-h_p)}{2l^3}-\frac{R}{2l}\right)\sec\beta\cdot\varphi\mathrm{d}\sigma=\delta g. \quad (13)$$

公式(13)是一个关于函数 φ 的第二类 Fredholm 积分方程. 以级数形式展开,

$$l=l_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{h-h_p}{l_0}\right)^2+\cdots\right], \quad (14)$$

以及

$$\sec\beta=1+\frac{1}{2}\tan^2\beta+\cdots, \quad (15)$$

其中 $l_0=2R\sin(\psi/2)$ 为球面距. 将(14)及(15)式代回到积分方程(13)后, 逐次取其零阶近似、一阶近似……, 予以求解.

首先, 对方程(13)取零阶近似, 并设对应的单层密度 $\varphi=\varphi_0$, 此时有

$$2\pi\varphi_0+\frac{R}{2}\int_\sigma\frac{\varphi_0}{l_0}\mathrm{d}\sigma=\delta g, \quad (16)$$

这是一个以球形边界作为近似的积分方程, 其对应的解即为著名的 Hotine 积分公式[7]

$$T_0=R^2\int_S\frac{\varphi_0}{l_0}\mathrm{d}\sigma=\frac{R}{4\pi}\int_\sigma\delta gH(\psi)\mathrm{d}\sigma, \quad (17)$$

其中 ψ 为待求点与流动面元之间的夹角, $H(\psi)$ 为 Hotine 核, 其具体形式和性质在许多物理大地测量学教科书中可以查到. 将(17)式代回(16)式, 得到零阶近似下单层密度函数 φ_0 的表达式为

$$\varphi_0=\frac{1}{2\pi}\left[\delta g-\frac{1}{8\pi}\int_\sigma\delta gH(\psi)\mathrm{d}\sigma\right]. \quad (18)$$

以零阶近似为基础, 再考虑公式(13)中的一阶项即地形高程影响, 并设对应的单层密度函数为

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \tag{19}$$

根据公式(14)及(15), $l \approx l_0$ 及 $\sec\beta \approx 1$, 则(13)式变为

$$2\pi(\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{R}{2}\int_\sigma \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{l_0}\mathrm{d}\sigma - R^2\int_\sigma \frac{h - h_p}{l_0^3}(\varphi_0 + \varphi_1)\mathrm{d}\sigma = \delta g, \tag{20}$$

略去二阶小量 $(h - h_p)\varphi_1$, 并考虑零阶近似式(16), 得到

$$2\pi\varphi_1 + \frac{R}{2}\int_\sigma \frac{\varphi_1}{l_0}\mathrm{d}\sigma = R^2\int_\sigma \frac{h - h_p}{l_0^3}\varphi_0\mathrm{d}\sigma . \tag{21}$$

令

$$\delta g_1 = R^2\int_\sigma \frac{h - h_p}{l_0^3}\varphi_0\mathrm{d}\sigma, \tag{22}$$

则有

$$2\pi\varphi_1 + \frac{R}{2}\int_\sigma \frac{\varphi_1}{l_0}\mathrm{d}\sigma = \delta g_1. \tag{23}$$

公式(23)与公式(16)形式完全一致, 若设 φ_1 对应的扰动位为 T_1, 便得到

$$T_1 = R\int_\sigma \frac{\varphi_1}{l_0}\mathrm{d}\sigma = \frac{R}{4\pi}\int_\sigma \delta g_1 H(\psi)\mathrm{d}\sigma, \tag{24}$$

以及

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\delta g_1 - \frac{1}{8\pi}\int_\sigma \delta g_1 H(\psi)\mathrm{d}\sigma\right]. \tag{25}$$

最后, 一阶近似下的扰动位等于

$$T = T_0 + T_1 = \frac{R}{4\pi}\int_\sigma \delta g H(\psi)\mathrm{d}\sigma + \frac{R}{4\pi}\int_\sigma \delta g_1 H(\psi)\mathrm{d}\sigma, \tag{26}$$

其中,

$$\delta g_1 = \frac{R^2}{2\pi}\int_\sigma \frac{h - h_p}{l_0^3}\left[\delta g - \frac{1}{8\pi}\int_\sigma \delta g H(\psi)\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{d}\sigma . \tag{27}$$

按此原理, 逐次逼近下去, 可以得到关于扰动位 T 更高阶的表达式. 由此, 也就得到了 GPS/重力边值问题的逼近解.

4 GPS/重力边值问题的应用

4.1 高程异常 ζ 的计算

根据 Bruns 公式[6], 并应用 GPS/重力边值问题求解得到的地面扰动位 T, 可以直接写出高程异常计算公式:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_\sigma(\delta g + \delta g_1)H(\psi)\mathrm{d}\sigma . \tag{28}$$

4.2 垂线偏差的计算

应用完全类似 Molodensky 理论关于垂线偏差的计算公式, 直接写出地面垂线偏差表达式[6]

$$\xi = -\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\zeta}{\partial\phi}\right)_S + \frac{\partial\zeta}{\partial h}\tan\beta_1, \tag{29a}$$

$$\eta = -\left(\frac{1}{R\cos\phi}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}\right)_S + \frac{\partial\zeta}{\partial h}\tan\beta_2. \tag{29b}$$

根据公式(28), 将(29)式中高程异常 ζ 沿纬向 ϕ 和经向 λ 的导数直接写为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\phi} = \frac{R}{4\pi r}\int_\sigma(\delta g + \delta g_1)\frac{\mathrm{d}H(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\cos\alpha\mathrm{d}\sigma, \tag{30a}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda} = \frac{R}{4\pi r}\int_\sigma(\delta g + \delta g_1)\frac{\mathrm{d}H(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\sin\alpha\mathrm{d}\sigma, \tag{30b}$$

其中 α 为流动面元与待求点所构成天顶距对应的方位角. 高程异常沿垂向 h 的导数可写为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{T}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\gamma}\left(-\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial h}T\right). \tag{31}$$

考虑公式(1), 并应用忽略扁率级(10^{-3})的正常重力导数公式: $-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial h} = \frac{2}{r}$, 则(31)式等价于

$$\frac{\partial\zeta}{\partial h} = \frac{\delta g}{\gamma} - \frac{2}{r}\zeta \approx \frac{\delta g}{\gamma}, \tag{32}$$

式中 $\frac{2\zeta}{r}$ 为 10^{-4} 量级, 故被忽略. 将(30)及(32)式代入(29)式, 最后得到 GPS/重力边值问题关于垂线偏差的计算公式:

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma}\int_\sigma(\delta g + \delta g_1)\frac{\mathrm{d}H(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\cos\alpha\mathrm{d}\sigma + \frac{\delta g}{\gamma}\tan\beta_1, \tag{33a}$$

$$\eta = -\frac{1}{4\pi\gamma}\int_\sigma(\delta g + \delta g_1)\frac{\mathrm{d}H(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\sin\alpha\mathrm{d}\sigma + \frac{\delta g}{\gamma}\tan\beta_2. \tag{33b}$$

4.3 外部重力场的确定

在传统的物理大地测量中, 关于地球外部重力场的确定, 无论是直接法、表面法还是向上延拓, 都是以球面或平面近似为前提, 并未直接考虑地形起伏问题. 地形影响完全依赖其他方法和手段进行处理. 同时, 各方法所推导出的计算公式, 其中所含的高程及垂线偏差量都是作为已知量加以应用的. 传统方法计算高程及进行归算时的误差被传播至对外部重力场的赋值之中, 而 GPS/重力边值问题的斜边

界特征及直接获取大地高程的优势,恰恰为克服传统方法中的上述困难提供了新的途径.

另一方面,正是由于传统的计算外部重力场方法将高程或垂线偏差作为已知量,使得应用 GPS/重力边值问题为外部场赋值有了许多可以借助的公式. 一个最为直接的方法即为"确定扰动重力的表层法". 所谓表层法,是利用了扰动位在外部空间的调和性及其在地面与扰动重力的内在联系,根据调和函数的惟一性原理,以地面扰动重力为约束,求解外部扰动位及扰动重力.

将扰动位表达为单层位形式

$$T_p = \int_S \frac{\varphi}{l} \mathrm{d}S , \tag{34}$$

此时的 l 表示空间 P 点与地表面元之间的距离, S 为 GPS 所确定的大地高构成的地球自然表面. 由于 T_P 是惟一的,它在地球表面必须与观测值(扰动重力)相对应. 因此,可以通过第 3 节的连续趋近法对单层密度函数 φ 加以确定. 即当 P 点为地面点时,公式(34)等价于公式(5). 而公式(34)中的 φ 可以用公式(19)、(18)及(25)表达. 最后,外部重力场(扰动重力)的计算公式被写为

$$\delta g_r = \frac{\partial T}{\partial r} = R^2 \int_\sigma \varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{l}\right) \mathrm{d}\sigma$$

$$= - R^2 \int_\sigma \varphi \frac{r - R\cos\psi}{l^3} \mathrm{d}\sigma , \tag{35a}$$

$$\delta g_\phi = - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{R^2}{r} \int_\sigma \varphi \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{l}\right) \cos\alpha \mathrm{d}\sigma$$

$$= R^2 \int_\sigma \varphi \frac{R}{l^3} \sin\psi \cos\alpha \mathrm{d}\sigma , \tag{35b}$$

$$\delta g_\lambda = - \frac{1}{r\cos\phi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{R^2}{r} \int_\sigma \varphi \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{l}\right) \sin\alpha \mathrm{d}\sigma$$

$$= R^2 \int_\sigma \varphi \frac{R}{l^3} \sin\psi \sin\alpha \mathrm{d}\sigma , \tag{35c}$$

以及

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = \frac{1}{2\pi}\Big[\delta g + \delta g_1 - \frac{1}{8\pi} \int_\sigma (\delta g + \delta g_1) H(\psi) \mathrm{d}\sigma \Big] , \tag{36}$$

其中 r 为地心向径, ϕ 为地心纬度, λ 为经度.

5　结　论

理论上,GPS/重力边值问题的关键在于边界固定,以扰动重力作为边值. 相对传统大地边值问题,GPS/重力边值问题具有求解过程方便可靠,误差源少等优势. 从求解过程分析,Hotine 函数在计算公式中起着重要作用. 研究表明[8],Hotine 函数较之 Stokes 函数,在边界值精度相同的情况下,前者更为"稳健",抗差性优于后者.

本文仅仅从理论上给出了 GPS/重力边值问题的逼近解. 针对不同的需求,如精度指标、地形差异、空间尺度的大小、计算速度与精度的匹配等,人们还可以推导出各种相应的快速、适用的计算公式. 这方面的工作,传统物理大地测量的研究中仍有许多可鉴之处.

目前,GPS/重力边值问题用于实际所面临的主要困难在于:在原有大量重力数据的点位上测定 GPS 值尚不现实,尤其是针对全球性及难以恢复重力点位的区域性似大地水准面及外部重力场进行的计算.

但是,在那些重力数据与 GPS 数据具有较好的匹配性以及具有较好观测条件的地区,GPS/重力边值问题的应用将显示出其优势. 随着 GPS 数据的进一步积累,这一问题的应用范围及功能领域将更加广阔.

参考文献

[1] Koch K R. Reformulation of the geodetic boundary value problem in view of the results of geometric satellite geodesy. In: W T Kattner. Advance in Dynamic Gravimetry. Instrument Society of America, Pittsburgh, 1970. 111~114

[2] Koch K R, Pope A J. Uniqueness and existence for the geodetic boundary value problem using the known surface of the Earth. *Bull. Geod.*, 1972, **46**: 167~176

[3] Bjerhammar A, Svensson L. On the geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface-A satellite approach. *Bull. Geod.*, 1983, **57**: 382~393

[4] Grafarend E W, Heck B, Knickmeyer E H. The free versus fixed geodetic boundary value problem for different combinations of geodetic observables. *Bull. Geod.*, 1985, **59**: 11~32

[5] LI Fei. Analysis and corrections to the errors caused by gravity anomaly in gravity inversion. *Acta Geodetica et Cartographica Sinica* (English Edition), 2001, 49~53

[6] Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy. San Fransisco: W H Freeman, 1967. 206~209

[7] 管泽霖, 管　铮, 黄谟涛等. 局部重力场逼近理论和方法. 北京: 测绘出版社, 1995. 42~44
GUAN Zelin, GUAN Zheng, HUANG Motao, et al. Theories and Methods on the Approach of Local Gravity Field (in Chinese). Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 1995. 42~44

[8] Vanicek P, ZHANG Changyou, Sjoberg L E. A comparison of stokes and Hotine's approaches to geoid computation. *Manu. Geod.*, 1992, **17**: 29~35